Ad-Soyad :
Numara :

1	2	3	4	5	6	Toplam

22.05.2019

KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ DERSİ FİNAL SINAVI

1. Süreklilik tanımını kullanarak

$$f(z)=\begin{cases} \dfrac{z\,\mathrm{Re}\,z}{|z|}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $z=0$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.(15)

2. $0\le x\le \ln 2$, $-\dfrac{\pi}{4}\le y\le \dfrac{\pi}{2}$ dikdörtgeninin üstel dönüşüm altındaki görüntüsünü bulunuz ve çiziniz.(15)

3. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$ ve $w_0=u_0+iv_0$ olsun. Bu takdirde $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ olması için $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0$ ve $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$ olmasıdır, ispatlayınız.(20)

4. Reel kısmı $u(x,y)=xy^3-x^3y$ olan analitik bir fonksiyon bulunuz.(20)

5. $f(z)=\dfrac{Log(2z-i)}{z^2+1}$ fonksiyonunun türevlenebildiği kümeyi ve türevini bulunuz.(20)

6. $\cos(1+i)=\cos(1)\cosh(1)-i\sin(1)\sinh(1)$ olduğunu gösteriniz.(10)

Not : Süre 90 dakikadır.

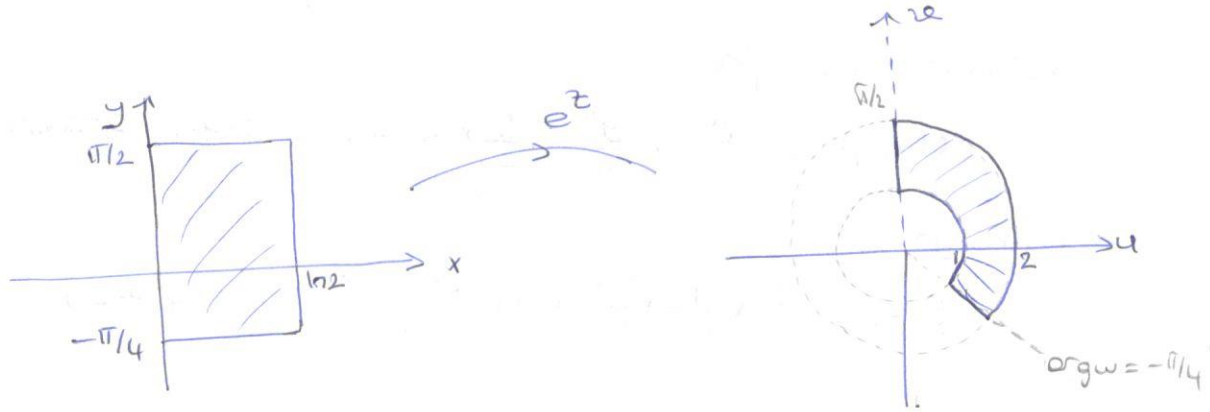
Başarılar Dilerim...

Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

1) $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bir $\delta > 0$ sayısını $\delta = \varepsilon$ olarak seçelim. $|z-0| = |z| < \delta$ olduğunda

$$|f(z)-f(0)| = \left| \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} \right| = \frac{\cancel{|z|} \cdot |\operatorname{Re} z|}{\cancel{|z|}} = |\operatorname{Re} z| \leq |z| < \delta = \varepsilon$$

$\Rightarrow f,\ z_0 = 0$ noktasında süreklidir.

2) 

$0 \leq x \leq \ln 2 \quad , \quad -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ve $w = e^z$ olmak üzere

$e^0 \leq |w| \leq e^{\ln 2}$

$1 \leq |w| \leq 2 \quad , \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg w \leq \frac{\pi}{2}$

4) $u(x,y) = xy^3 - x^3 y$

$u_x = y^3 - 3x^2 y \qquad u_y = 3xy^2 - x^3$

$u_{xx} = -6xy \qquad u_{yy} = 6xy \qquad \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$ olduğundan

u harmoniktir. u nun $v(x,y)$ harmonik eşleniğini bulmalıyız. Böylece u ve v Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$

$v_y = u_x = y^3 - 3x^2 y \qquad (1)$

$v_x = -u_y = -3xy^2 + x^3 \qquad (2)$ olur.

(1) denkleminin y ye göre integrali alınırsa

$$v(x,y) = \int (y^3 - 3x^2y)\,dy = \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \varphi(x)$$ olup,

$$v_x = -3xy^2 + \varphi'(x)$$ ve (2) denkleminden

$$-3\cancel{xy^2} + \varphi'(x) = -3\cancel{xy^2} + x^3 \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x^4}{4} + c, \; c \in \mathbb{R}$$

bulunur. Buna göre

$$v(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + c$$ olup, aranan analitik

fonksiyon

$$f(z) = (xy^3 - x^3y) + i\left(\frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + c\right)$$ olur.

5) Fonksiyonu tanımsız yapan noktalar $z^2+1=0$ denkleminin kökleridir.

$$z^2+1=0 \Rightarrow z^2 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{2}\right), \quad k=0,1$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

$\Rightarrow$ Fonksiyon $z_0 = i$ ve $z_1 = -i$ noktalarında tanımlı olmadığından, bu noktalarda analitik de değildir. Yani bu noktalarda türevlenemez.

Ayrıca $Log(2z-i)$ fonksiyonu da

$$A = \mathbb{C} - \{z \mid Re(2z-i) \leq 0,\ Im(2z-i) = 0\}$$
$$= \mathbb{C} - \{z \mid Re(2x+(2y-1)i) \leq 0,\ Im(2x+(2y-1)i) = 0\}$$
$$= \mathbb{C} - \{z \mid 2x \leq 0,\ 2y-1 = 0\}$$
$$= \mathbb{C} - \{z \mid x \leq 0,\ y = \tfrac{1}{2}\}$$

kümesi üzerinde türevlenebilirdir. O halde f fonksiyonu

$\mathbb{C} - \left(\{z \mid x \leq 0, y = \tfrac{1}{2}\} \cup \{i, -i\} \right)$ kümesi üzerinde türevlenebilirdir. Türevi de

$$f'(z) = \frac{\frac{2}{2z-i}(z^2+1) - 2z \cdot Log(2z-i)}{(z^2+1)^2} = \frac{2(z^2+1) - 2z(2z-i)Log(2z-i)}{(z^2+1)^2 \cdot (2z-i)}$$

olarak bulunur.

6) $$\cos(1+i) = \frac{e^{i(1+i)} + e^{-i(1+i)}}{2} = \frac{e^{i-1} + e^{-i+1}}{2}$$
$$= \frac{(\cos 1 + i \sin 1)e^{-1} + (\cos 1 - i \sin 1)e^{1}}{2}$$
$$= \cos 1 \cdot \frac{e^1 + e^{-1}}{2} - i \sin 1 \, \frac{e^1 - e^{-1}}{2}$$
$$= \cos 1 \cdot \cosh 1 - i \sin 1 \sinh 1$$